

**РАСЧЕТ УСТОЙЧИВОСТИ СОСТОЯНИЯ РАВНОВЕСИЯ
СЛОИСТОГО ГОРНОГО МАССИВА С ЛИНЕЙНО УПРУГИМИ
ТРАНСВЕРСАЛЬНО-ИЗОТРОПНЫМИ СВОЙСТВАМИ**

Розглядається проблема знаходження критичних значень параметрів навантаження та хвилеутворення, що обумовлюють виникнення поверхневої втрати стійкості у шаруватих масивах гірничих порід із пружними трансверсально-ізотропними властивостями, які попередньо знаходяться у стані докритичної рівноваги під дією поверхневих розподілених стискуючих навантажень «мертвого» або слідкуючого типу. Дослідження проводяться в межах моделі кусково-однорідного середовища на основі тривимірної лінеаризованої теорії стійкості при малих докритичних деформаціях.

**CALCULATION OF STABILITY OF AN EQUILIBRIUM STATE
OF A LAUURED MINING MASSIF WITH LINEARLY ELASTIC
TRANSVERSAL - ISOTROPIC PROPERTIES**

The problem of definition of critical values of surface load and parameter of wavemaking at which there is a surface loss of stability in lauered rock massif with elastic transversal – isotropic properties is considered. The mining massif is beforehand in a condition of a stable equilibrium under surface distributed compression loads of a dead or tracking type. The researches will be carried out within the framework of model of piecewise - homogeneous mediums on the basis of three-dimensional linear theory of stability at small subcritical deformations.

Введение. Проблема устойчивости состояния равновесия слоистых горных пород под действием сжимающих распределенных нагрузок гравитационного и тектонического характера возникает в геотектонике и горной механике при рассмотрении вопросов складкообразования, устойчивости контура горных выработок и т. д. В литературе для этой цели применялись различные подходы и теории устойчивости. Отметим три, наиболее применяемые из них: а) подход, основанный на приближенном варианте трехмерной теории устойчивости [1, 2]; б) подход, основанный на прикладной дискретно-континуальной теории многослойных сред; в) подход, при котором для описания деформирования всех элементов породного массива используются различные варианты трехмерной линейаризованной теории устойчивости [2]. В рамках отмеченных вариантов теорий устойчивости, в зависимости от свойств горных пород и характера их докритического напряженного состояния используют континуальный подход в теории устойчивости или модель кусочно-однородной слоистой среды. Для описания физико-механических свойств пород применялись различные модели, учитывающие упругие, неупругие и вязкоупругие свойства горных пород. В работах [3, 5] в рамках третьего подхода разработаны для разных расчетных схем аналитические и вариационные методы решения задач о внутренней и поверхностной потере устойчивости в структуре слоистых сред с различной компоновкой. На основе этих подходов здесь получено решение задачи о поверхностной потере устойчивости в структуре слоистого породного блока, жестко сопряженного с породным массивом, который моделируется структурно однородным полупространством.

§1. Постановка задачи. Рассматривается равновесие породного массива, моделируемого полугораниченной слоистой средой, состоящей из конечного числа слоев, жестко сопряженных с структурно-однородным полупространством и нагруженного распределенной поверхностной сжимающей нагрузкой "мертвого" или следящего характера. Свойства всех элементов слоистого массива горных пород описываются в рамках модели линейно упругого трансверсально-изотропного тела, что характерно для отдельных видов горных пород. Такая модель в общем случае позволяет через приведенные характеристики учесть и структурную неоднородность (трещиноватость, пористость и т. д.) горных пород в пределах отдельно выбранного слоя. Каждый K -й элемент слоистой среды отнесен к локальной системе лагранжевых координат $x_i^{(k)}$, которые до деформации совпадают с декартовыми координатами. Координата $x_3^{(k)}$ направлена по нормали к плоскости простирания слоев. Исследуется вопрос о поверхностной потере устойчивости состояния равновесия породного массива, когда это явление реализуется в приповерхностной зоне массива и затухает при удалении от поверхности $x_3^{(1)} = 0$. В направлении координатных осей $ox_1^{(k)}, ox_2^{(k)}$ линейные размеры слоистой среды предполагаются такими, чтобы в их пределах могло образоваться достаточно большое количество волн формы потери устойчивости. Это позволяет исследовать рассматриваемое явление в пределах одной полуволны формы потери устойчивости. Исследуется потеря устойчивости в структуре породного массива, когда критические значения параметров нагружения и волнообразования, характеризующих это явление, зависят не от размеров и формы исследуемого слоистого объекта, а от соотношения между геометрическими и физико-механическими характеристиками отдельных слоев и полупространства. Толщину слоев h_k ($k = 1, \bar{T}$) считаем постоянной в направлении координатных линий, а сами слои параллельными между собой. В плоскости простирания слоев среда загружена распределенными сжимающими нагрузками интенсивности p_i ($i = 1, 2$), а к ее граничной поверхности приложена нагрузка p_3 , моделирующая действие вышележащей толщи горных пород или реакцию взаимодействия породного массива с подкрепляющими элементами. В общем (трехмерном) случае линеаризованные уравнения устойчивости при малых докритических деформациях в пределах каждого элемента слоистого тела имеют вид

$$\begin{aligned} & [(a_{11} + \sigma_{11}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + (G_{12} + \sigma_{22}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + (G_{13} + \sigma_{33}^0) \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}] u_1 + \\ & + (a_{12} + G_{12}^0) \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1 \partial x_2} + (a_{13} + G_{13}^0) \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1 \partial x_3} = 0; \quad (1, 2, 3 \text{ Curl}). \end{aligned} \quad (1)$$

Здесь обозначено: a_{ij}, G_{ij} — упругие постоянные для горных пород; u_i — компоненты возмущений вектора перемещения $\vec{u}$ горных пород; σ_{ii}^0 — компоненты тензора обобщенных напряжений в докритическом состоянии. Рассматриваем случай, когда тело имеет три взаимно-ортогональные плоскости

упругой симметрии. Указанные плоскости принимаем за координатные плоскости $x_i = 0$. Основные соотношения и обозначения приведены в работах [1, 2]. Соотношения упругости в общем виде можно записать

$$\begin{aligned}\sigma_{11} &= A_{11}\varepsilon_{11} + A_{12}\varepsilon_{22} + A_{13}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{22} &= A_{21}\varepsilon_{11} + A_{22}\varepsilon_{22} + A_{23}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{33} &= A_{31}\varepsilon_{11} + A_{32}\varepsilon_{22} + A_{33}\varepsilon_{33}; \\ \sigma_{23} &= 2A_{44}\varepsilon_{23}; \sigma_{13} = 2A_{55}\varepsilon_{13}; \sigma_{12} = 2A_{66}\varepsilon_{12}.\end{aligned}\quad (2)$$

При этом для констант упругости справедливы условия симметрии $A_{ij} = A_{ji}$. В дальнейшем будет использована связь между этими константами и техническими постоянными, которая здесь не приводится ввиду громоздкости ее записи. Отметим лишь, что A_{ij} являются функциями от упругого потенциала Φ_0 , которые, в частности, для сжимаемых тел можно записать

$$A_{ij}^{сж} = \varphi_1[(\Phi_0(A_1, A_2, A_3))], \quad (3)$$

где A_1, A_2, A_3 — базисные алгебраические инварианты тензора деформаций Грина.

На тело действуют поверхностные распределенные сжимающие нагрузки, интенсивности p_i . Между слоями выполняются условия непрерывности компонентов векторов напряжений и перемещений, которые в возмущениях можно записать.

$$\begin{aligned}P_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} + 0) &= P_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)} - 0), \quad t = k + 1 \\ u_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)} + 0) &= u_i^{(t)}(x_1^{(t)}, x_2^{(t)}, x_3^{(t)} - 0), \quad i = \overline{1,3}\end{aligned}\quad (4)$$

На «бесконечности» выполняются условия затухания

$$u_i^{(K+1)}(x_1^{(K+1)}, x_2^{(K+1)}, x_3^{(K+1)}) \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad x_3^{(K+1)} \rightarrow -\infty \quad (5)$$

На поверхности среды ($x_3^{(1)} = 0$) граничные условия задаем в напряжениях

$$P_i^{(1)}(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, 0) = \tilde{P}_i. \quad (6)$$

Здесь $P_i^{(k)}(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ — компоненты возмущений главного вектора напряжений на поверхности сопряжения k -го элемента среды; $\tilde{P}_i$ — компоненты возмущений поверхностной нагрузки. При «мертвых» значениях p_3 величина $\tilde{P}_i = 0$, а при следящих [2].

$$\tilde{P}_i = -p_3(N_i \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\alpha^{(1)}} - N_\alpha \delta_{\beta i} \frac{\partial u_\alpha^{(1)}}{\partial x_\beta^{(1)}}). \quad (7)$$

Сформулированная задача исследуется в статической постановке в рамках подхода Эйлера. Поэтому при следящих значениях нагрузок p_3 необходимо проверять выполнение достаточных условий применимости такого подхода. В работах [2] они записаны в следующем виде

$$\int_{\bigcup_{k=1}^T V_k} (u_j \bar{F}_j - u_j \bar{F}_j)_k dV + \int_{S_0 + \bigcup_{k=1}^T F_k} (u_j P_j - u_j P_j)_k dS = 0. \quad (8)$$

Принятые обозначения приведены в работе [3].

Таким образом, исходная краевая задач приводится к исследованию на собственные значения системы уравнений (1-7) при условии выполнения равенства (8).

§2. Численные результаты. Решение конкретной задачи в работе получено для случая плоской деформации в плоскости $x_1^{(k)}$, $ox_3^{(k)}$ при $p_3 = 0$.

$$(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \eta_3^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2})(\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \eta_1^2 \frac{\partial^2}{\partial x_1^2})\Psi = 0. \quad (9)$$

Здесь потенциал $\Psi = \Psi(x_1, x_3)$, а коэффициенты $\eta_{1,3} = \eta_{1,3}(\sigma_{ij}^0, a_{ij}, G_{ij})$.

В случае кусочно-однородного докритического напряженного состояния слоистой среды решение уравнения (9) для k -го слоя выбираем в виде

$$\Psi_j^{(k)} = \left[A_j^{(k)} sh(\frac{\pi}{l} \eta_j^{(k)} x_3^{(k)}) + B_j^{(k)} ch(\frac{\pi}{l} \eta_j^{(k)} x_3^{(k)}) \right] \exp(i \frac{\pi}{l} x_1^{(k)}), i = \sqrt{-1}. \quad (10)$$

Здесь $j=1,3$; $A_j^{(k)}, B_j^{(k)}$ — неизвестные постоянные интегрирования. Для их определения воспользуемся матричным методом, изложенным в работах [3, 4]. Окончательно приходим к системе однородных алгебраических уравнений, относительно этих постоянных. При этом принимаются обозначения: $F_k, \tilde{S}_k$ — матрицы четвертого ранга, записанные в явном виде в [3];

$\vec{R}_k = \|A_1^{(k)}, A_3^{(k)}, B_1^{(k)}, B_3^{(k)}\|^*$ - вектор столбец постоянных интегрирования; через «*» обозначена операция транспонирования

$$\left. \begin{aligned} D_1 \bar{X}_1 &= 0; \\ F_1 \bar{S}_1 \bar{X}_1 &= F_2 \bar{X}_2; \\ \dots\dots\dots & \\ F_T \bar{S}_T \bar{X}_T &= F_{T+1} \bar{X}_{T+1} \end{aligned} \right\} T+1. \quad (11)$$

Значение матриц $D_n = [d^{(n)}_{ij}] (i=1,2; j=\overline{1,4}; n=1,3)$ зависит от вида нагрузки $\tilde{P}_i$ на поверхности покрытия и от условий на бесконечности [5].

Из условия существования нетривиальных решений системы (11) в результате преобразований, изложенных в работе [3], приходим к следующему характеристическому уравнению

$$(q_{11} + q_{13})(q_{22} + q_{24}) - (q_{21} + q_{23})(q_{12} + q_{14}) = 0, \quad (12)$$

где величины q_{ij} определяются из матричного равенства

$$D_1 \left(\prod_{k=1}^{T-1} (\tilde{S}_k^{-1} F_k^{-1} F_{k+1}) \right) = [q_{ij}]_{i=1,2}^{j=\overline{1,4}}. \quad (13)$$

Минимальные корни характеристического уравнения (12) определяют критические значения параметров нагружения $z = p_1/E_{T+1}$ и полнобразованная $\omega = (\pi h)/l$, которые обуславливают явление поверхностной неустойчивости в породном массиве. Характеристическое уравнение решалось на ЭВМ методом бисекции. Из полученных решений выделяем те, для которых выполняется свойство

$$z_{кр} = \min(\omega); \quad \omega \in R: \omega \neq 0 \wedge \infty. \quad (14)$$

Каждому заданному значению ω соответствует одно собственное значение параметра z ; при этом реализуется та форма потери устойчивости, которой соответствует значение $\min z(\omega)$. Значение параметра $\omega = \omega_{кр}$ определяет длину полуволны l формы потери устойчивости, общей для всего слоистого массива

$$l_{кр} = \pi h \omega_{кр}^{-1}; \quad h = \sum_{i=1}^{\tilde{T}} h_i, \quad (15)$$

где под T понимаем число слоев T во всем слоистом пакете, сопряженном с полупространством; h_i – толщина i -го слоя.

Отдельные результаты решения задачи приведены на Рис. 1 и Рис. 2. для случая, когда ось изотропии слоев совпадает с осью ox_3 .

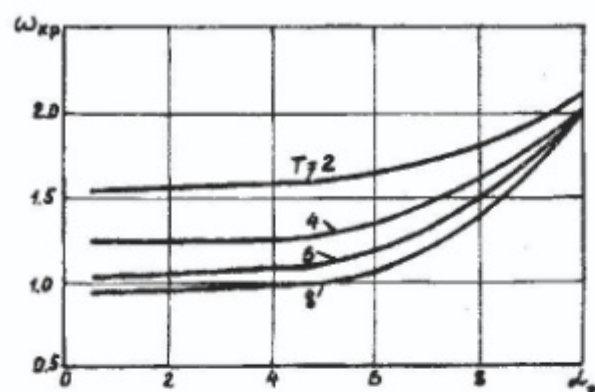


Рис. 1

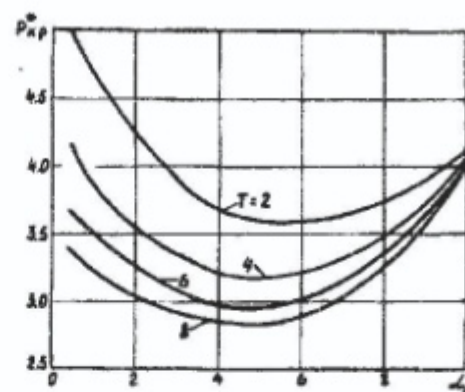


Рис. 2

Здесь рассматривается случай, когда пакет слоев образуется периодическим повторением двух слоев с различными механическими упругими свойствами. Общее количество слоев в массиве указано на рисунках цифрами возле кривых. В плоскости изотропии ($x_3^{(k)} = \text{Const}$) k -го слоя имеем технические упругие постоянные: модуль Юнга – E_k и коэффициент Пуассона – ν_k . В ортогональном направлении имеем соответственно E'_k, ν'_k и модуль $-G'_k$. Здесь введены обозначения: $\beta_i = E_i / G'_i$; $\alpha_i = E_i / E'_{i,i}$; $n_i = E_{T+1} / E_i$. На рисунках показано влияние отношения $\alpha = E / E'$ слоев с четными номерами на параметры нагружения $P_{кр}^* = 10^2 (p_1 / E_{T+1})$ и волнообразования $\omega_{кр}$. Следует заметить, что слои с нечетными номерами, в том числе и верхний слой, имеют жесткость значительно большую, чем слои с четными номерами. Механические характеристики слоев в порождающем пакете и полупространстве, используемые для расчетов, приведены в таблице.

Эти данные выбраны лишь с целью иллюстрации изучаемого явления. Для реальных горных пород необходимо проводить дополнительные расчеты. Анализ результатов показал, что явление потери устойчивости может реализоваться при малых докритических деформациях, а значение основных параметров задачи существенно зависит от количества слоев в массиве и механических параметров полупространства. Характерной особенностью обоих рисунков является четко выраженный минимум у кривых, чего не наблюдается при рассмотрении аналогичной задачи с другой ориентацией оси изотропии [4].

Таблица

Слой	n_i	ρ_i	α_i	β_i	ν_i	ν'_i
1	0,05	0,3	2	8,0	0,30	0,20

2	1,0	0,7	3	10	0,35	0,25
$T+1$	1,0	-	1,5	6,0	0,28	0,32

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гузь А.Н. О задачах устойчивости в механике горных пород // Проблемные вопросы механики горных пород. – Алма-Ата: Наука, 1972. С. 19 – 25.
2. Гузь А. Н. Основы теории устойчивости горных выработок. — Киев: Наук. думки, 1977—204 с.
3. Гузь А.Н., Чехов В.Н. Исследование поверхностной неустойчивости слоистых тел в трехмерной постановке // Прикл. механика. – 1990. – 26, №2 – С. 3– 23.
4. Стукачилов В.С., Чехов В.Н. Поверхностная неустойчивость слоистых материалов при сжатии с учетом ортотропии их физико-механических свойств // Прикл. механика. – 2006. – 42, №7. – С. 24– 33.
5. Чехов В.Н. О постановке задач в трехмерной линеаризованной теории складкообразования / Українсько-Польський форум гірників. Матеріали форуму. – Изд-во ДНГУ. – 2004. – С. 21– 532.

УДК 550.428:553.93

Канд. геол.-мин. наук В.В. Ишков
(ДГУ Украины)

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ МИКРОЭЛЕМЕНТОВ В УГЛЯХ КРАСНОАРМЕЙСКОГО РАЙОНА НА ПРИМЕРЕ ВАНАДИЯ

У статті розглянуто особливості розподілу V у вугільних пластах Красноармійського геолого-промислового району. Встановлено характер його розподілу, виконано розрахунки середньозважених концентрацій у вугіллі основних пластів та свит, з'ясовано склад типоморфної геохімічної асоціації V з іншими токсичними і потенційно токсичними елементами у вугіллі району.

DISTRIBUTION MICROELEMENTS IN COALS OF KRASNOARMEISK REGION AS ON EXAMPLE VANADIUM

The peculiarities of V distribution in the coal strata of Krasnoarmysk geological and industrial district have been considered in the article. There was defined the character of its distribution, calculated weighted average concentrations in the coals of basic strata and formations, determined the composition of typomorphic geochemical association of V with other toxic and potentially toxic elements in the coals of the district.

Газогенерационный и сорбционный потенциал угольных пластов в значительной степени зависит от вещественного состава углей, в том числе от состава, количества и формы нахождения микроэлементов. Кроме того, ряд микроэлементов углей, в том числе и V относятся к группе токсичных и потенциально токсичных элементов и обязательное изучение их распределения в углях регламентируется нормативными документами ГКЗ Украины. В данной статье основными задачами изучения геохимии V в основных рабочих угольных пластах Красноармейского геолого-промышленного района Донбасса являлись: ревизия выполненных ранее исследований концентраций V; формирование представительных выборок анализов содержаний V по отдельным угольным пластам и по району в целом; установление средних концентраций V в угле основных пластов, отдельных свит и района в целом; анализ распределения содержаний V в целом по району; выявление связи и расчет уравнений регрессий между концентрациями V и другими основными